Chapitre. 2:
STATIQUE DES FLUIDES

1. Introduction

Dans ce chapitre, on abordera une catégorie importante de problèmes dans lesquels le fluide est au repos. Dans ce cas, il n'y aura aucune contrainte de cisaillement dans le fluide et les seules forces qui se développent à la surface des particules seront dues à la pression. Ainsi, notre principale préoccupation est d'étudier la pression et sa variation dans un fluide ainsi que l'effet de la pression sur les surfaces immergées. L'absence de contraintes de cisaillement simplifie l'analyse et, comme nous le verrons, on permet d'obtenir des solutions relativement simples à de nombreux problèmes pratiques importants.

2. Principe fondamental de la statique des fluides

Si le fluide en équilibre (statique des fluides), aucune force de frottement n'existe.L'élément de volume dV n'est alors soumis, généralement, que :
- à des forces de pesanteur, son poids :

$$d\vec{m}\vec{g} = \rho dV\vec{g}$$

Vertical, dirigé de haut en bas ;
- et à des forces de pression dont la résultante est :

$$d\vec{F} = -\overrightarrow{gradp}\,dV$$

A l'équilibre de cet élément de fluide, la somme des forces qui s'exercent sur lui est nulle :

$$\rho dV\vec{g} - \overrightarrow{gradp}\,dV = \vec{0}$$

La condition d'équilibre du fluide s'écrit donc :

$$\overrightarrow{gradp} = \rho\vec{g}$$

Cette relation traduit le principe fondamental de la statique des fluides.

3. Casdes fluides incompressibles, les liquides : Relation fondamentale de l'hydrostatique

Si on considère un fluide incompressible, et c'est le cas des liquides, sa masse volumique ne dépend pas des la pression.
Si, de plus, on suppose que la température est uniforme, on pourra considérer la masse volumique comme une constante.
Par ailleurs, sur des hauteurs courantes correspondant à des différences d'altitude de quelques mètres, g, accélération de la pesanteur, peut aussi être considérée comme constante.On peut alors calculer la différence de pression entre deux points M_1 et M_2 du liquide.

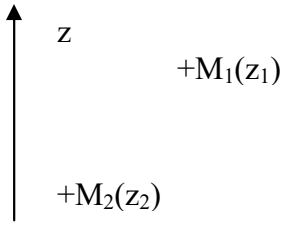

Figure 1 : Fluides incompressibles(RFH)

$$\int_{p1}^{p2} dp = -\rho g \int_{z1}^{z2} dz \Rightarrow p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1)$$

Ce résultat peut être interprété de plusieurs façons.
On peut écrire :

$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2 = cst$$

La quantité $(p + \rho gz)$ est la même en tous les points d'un liquide en équilibre.Si h comptée positivement de haut en bas est la dénivellation entre M_1 et M_2 :

$p_2 - p_1 = \rho gh$

Et $(p_2\text{-}p_1)$ est positif si M_2 est en dessous de M_1.

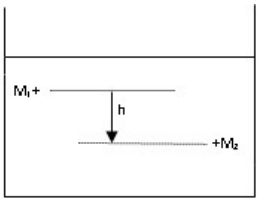

Figure 2 : Cas des fluides incompressibles

La relation $(p_2\text{-}p_1)$ traduit le principe fondamental de la statique des liquides joue un rôleextrêmement important (exemple l'étude des manomètres).
Dans un liquide, la pression croit du haut vers le bas ;

3.1.Théorème de pascal

Sous ce nom, est énoncée une propriété fondamentale des liquides.Soit deux points quelconques M_1 et M_2 pris à l'intérieur d'un liquide. Entre ces deux points, la différence de pression est :

$$p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1)$$

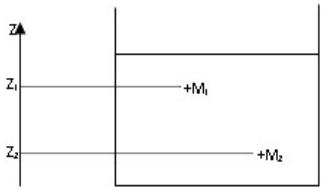

Figure 3 : Théorème de pascal

Si on augmente la pression p_2, la loi fondamentale de l'hydrostatique montre que la pression p_1 sera augmentée de la même quantité, puisque la quantité $(-\rho g(z_2 - z_1))$ reste toujours constante.

Enoncé du théorème : Toute variation de pression en un point se transmet également en tous les points d'un fluide incompressible (ρ = constante) au repos.

3.1.2. Application

- ✓ **Surface libre d'un liquide** (dans un champ de pesanteur uniforme)

$\Delta p = \rho gh = 0$ d'où $h = 0 \Rightarrow$ La surface libre d'un liquide au repos est plane et horizontale.

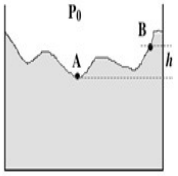

Figure 4 : Surface libre d'un liquide au repos

- ✓ **Surface de séparation de deux liquides non miscibles**

Dans le fluide I, P_B-P_A=$\rho_1$gh ; Dans le fluide II, P_B-P_A=$\rho_2$gh. D'où $\rho_1$gh=$\rho_2$gh=>gh (ρ_1-ρ_2) =0
Or g ≠ 0 et (ρ1 - ρ2) ≠ 0 ==> h = 0
La surface de séparation de deux liquides non miscibles au reposest horizontale.

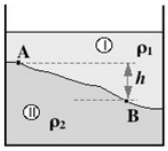

Figure 5 : Deux liquides non miscibles

- ✓ **Vases communicants contenant plusieurs liquides non miscibles**

P_B-P_A=ρ_1gh_1 ; P_B-P_C=ρ_2gh_2 , Or P_A=P_C=P_0 d'où $\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2$

Les différents de deux liquides non miscibles dans des vases communicantssont en rapport inverse de leurs masses volumiques.
Si ρ1 = ρ2 un fluide est à la même hauteur dans deux vasescommunicants.

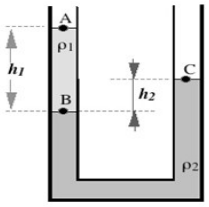

Figure 6 : Plusieurs liquides non miscibles

4. Cas des fluides compressibles : les gaz

La relation ($\int_{p1}^{p2} dp = -\rho g \int_{z1}^{z2} dz$) ne peut être intégrée sans précautions : en effet la masse volumique d'un gaz dépend à la fois de la pression et de la température.

Si on peut assimiler le gaz parfait, son équation d'état s'écrit : $pv = \frac{m}{M}RT$

En faisantapparaître la masse volumique, on obtient : $\rho = \frac{m}{v} = \frac{M}{R}\frac{p}{T}$

Et la relation ($\int_{p1}^{p2} dp = -\rho g \int_{z1}^{z2} dz$) devient : $dp = -\frac{M}{R} g \frac{p}{T} dz$ Ou : $\frac{dp}{p} = -\frac{M}{R} g \frac{dz}{T}$

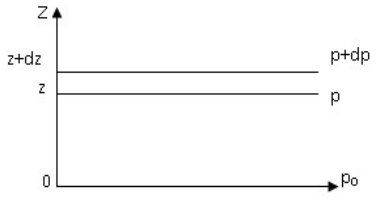

Figure 7:Fluides compressibles

5. Mesure de la pression atmosphérique

Le baromètre à mercure est une application de cette loi : P_B - P_C = ρH_g.g.h = P_B = P_A = P_0(Pression atmosphérique) Avec ρH_g= 13,596.10^3kg.m^{-3}

La pression normale correspond à h = 76 cm de mercure, soit : P_0 = 13,596.10^3(kg.m^{-3}). 9,806(m.s^{-2}). 0,76(m).
Hauteur de la colonne d'eau équivalente :$h_{eau} = hH_g.\rho H_g / \rho_{eau}$ =>h_{eau} = 10,33 m
La pression atmosphérique (au niveau de la mer) vaut : P0 = 1,013.10^5 Pa = 1013 mbar
Souvent on exprime la pression atmosphérique normale par la hauteur d'une colonne de mercure, donc 1 atmosphère = 760 mm de mercure.

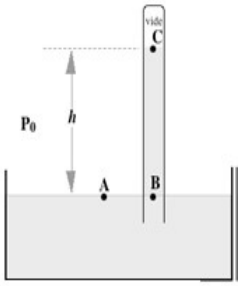

Figure 8 : Pression atmosphérique

5.1. Théorème d'Archimède

Tout corps plongé dans un fluide reçoit de la part de ce fluide une force (poussée) verticale, vers le haut dont l'intensité est égale au poids du volume de fluide déplacé (ce volume est donc égal au volume immergé du corps). Il résulte de ce théorème que si le poids d'un corps placé dans une masse fluide est inférieur au poids de son volume du fluide, le corps flotte.

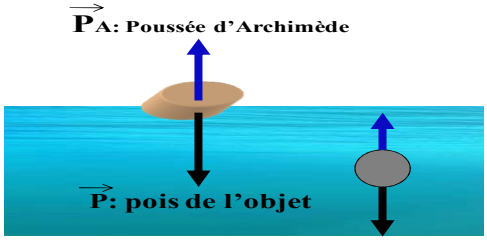

Figure 9: Théorème d'Archimède

C'est une poussée vers le haut dont l'intensité est égale au poids du fluide déplacé.

$$P_A = \rho_{liquide} .g.V_{solide\ immergé}$$

P_A : Poussée d'Archimède en N
$\rho_{liquide}$: Masse volumique du fluide du fluide en kg/m^3
V : volume du solide immergé dans le fluide en m^3.

Exemple : Quelle est la fraction de volume d'un morceau de métal solide de densité 7,25 qui flotte à la surface d'un récipient de mercure de densité 13,6.

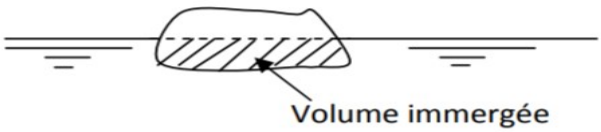

Figure : 11

Solution : Le morceau de métal en équilibre quand le poids de ce morceau égale la force d'Archimède: $F_A = Poinds \Rightarrow \rho_{Hg}.g.V_{\text{solide immergé}} = \rho_{\text{métal}}.g.V_{\text{total}}$

Donc : $$\frac{V_{\text{solide immergé}}}{V_{\text{total}}} = \frac{\rho_{\text{métal}}}{\rho_{Hg}} = \frac{7.25}{13.6} = 0.53$$

La fraction de volume immergée dans le mercure est 53,3%